

Να βρείτε το supremum και το infimum του συνόλου

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-1| < \left| \frac{1}{x} - 1 \right| \right\} \text{ και } B = \left\{ x \in \mathbb{R} : -2 \leq \frac{1}{x} < 1 \right\}$$

Λύση

Για το σύνολο A

i) Αν  $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1$

Άρα,  $x-1 < 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} + x - 2 < 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} < 0 \stackrel{(x-1)^2 > 0}{\Rightarrow} x < 0$  (Σ)

Που αυτό είναι άτοπο διότι  $x > 1$

ii) Αν  $0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1$

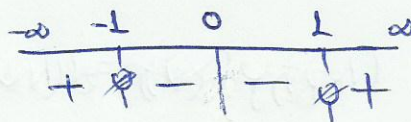
Άρα,  $1-x < \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + x - 2 > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} > 0 \stackrel{(x-1)^2 > 0}{\Rightarrow} x > 0$  Λογική

iii) Αν  $x < 0$

τότε  $1-x < 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} - x < 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2-1)x > 0 \stackrel{x < 0}{\Rightarrow} x^2-1 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-1, 1)$



Επομένως, από (ii) και (iii)

$A = (-1, 0) \cup (0, 1)$  ώστε  $\inf A = -1$  &  $\sup A = 1$

Για το σύνολο B

$-2 \leq \frac{1}{x}$  και  $\frac{1}{x} < 1$

•  $x > 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$  και  $x > 1$

•  $x < 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$  και  $x < -1$

$B = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ώστε

$\inf B = -1$  και  $\sup B = 1$

